УДК 519.63

ВЫЧИСЛЕНИЕ ВЕДУЩЕГО СОБСТВЕННОГО ЗНАЧЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ С ВЫРОЖДЕНИЕМ[1)]

В.С. ЖЕЛТУХИН[1], С.И. СОЛОВЬЁВ[2], П.С. СОЛОВЬЁВ[2]

[1] *Казанский национальный исследовательский технологический университет,*
[2] *Казанский (Приволжский) федеральный университет*
E-mail: vzheltukhin@gmail.com; sergei.solovyev@kpfu.ru

COMPUTATION OF THE LEADING EIGENVALUE OF A NONLINEAR STURM–LIOUVILLE PROBLEM WITH DEGENERATION

V.S. ZHELTUKHIN[1], S.I. SOLOV′ËV[2], P.S. SOLOV′ËV[2]

[1] *Kazan National Research Technological University,* [2] *Kazan Federal University*

Аннотация

Установлены условия существования минимального собственного значения, отвечающего положительной собственной функции, нелинейной задачи на собственные значения для обыкновенного дифференциального уравнения с вырождающимися коэффициентами. Задача аппроксимируется схемой метода конечных элементов на равномерной сетке. Исследуется сходимость приближенных решений к точным. Теоретические результаты иллюстрируются численными расчетами для модельной задачи.

Ключевые слова: собственное значение, положительная собственная функция, нелинейная задача на собственные значения, обыкновенное дифференциальное уравнение, задача Штурма–Лиувилля, метод конечных элементов

Summary

We derive the condition of the existence of the minimal eigenvalue corresponding to the positive eigenfunction of a nonlinear eigenvalue problem for an ordinary differential equation with degenerate coefficients. This problem is approximated by a scheme of the finite element method on uniform mesh. We investigate the convergence of approximate solutions to exact solutions. Theoretical results are illustrated by numerical experiments for a model problem.

Keywords: eigenvalue, positive eigenfunction, nonlinear eigenvalue problem, ordinary differential equation, Sturm–Liouville problem, finite element method

1. Постановка задачи.

В работе исследуется задача нахождения минимального собственного значения $\lambda \in \Lambda$, $\Lambda = [0, \infty)$, отвечающего положительной собственной функции $u(x)$, $x \in \Omega$, $\Omega = (0,1)$, $\overline{\Omega} = [0,1]$, удовлетворяющего обыкновенному дифференциальному уравнению и граничным условиям

$$\begin{aligned} &-(xp(\lambda s(x))u')' = xr(\lambda s(x))u, \quad x \in \Omega, \\ &u'(0) = u(1) = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

с коэффициентами, зависящими от спектрального параметра. Предположим, что функции $p(\mu)$, $r(\mu)$, $\mu \in \Lambda$, $s(x)$, $x \in \overline{\Omega}$ являются непрерывными положительными функциями. Кроме того, функция $p(\mu)$, $\mu \in \Lambda$ считается неубывающей ограниченной, а функция $r(\mu)$, $\mu \in \Lambda$ – неубывающей неограниченной. Предположим дополнительно, что функции $p'(\mu)$, $r'(\mu)$, $\mu \in \Lambda$, $s'(x)$, $x \in \overline{\Omega}$ являются непрерывными.

[1)] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 12-01-97026, 13-01-00908, 14-01-00755) и Минобрнауки РФ (базовая часть госзадания, проект от 01.02.2014 г. № 2196)

Для фиксированного $\mu \in \Lambda$ обозначим через $\gamma(\mu)$ минимальное простое собственное значение, отвечающее положительной собственной функции $u(x) = u_\mu(x)$, $x \in \Omega$, параметрической линейной задачи на собственные значения для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\begin{aligned} &-(xp(\mu s(x))u')' = \gamma(\mu) x r(\mu s(x))u, \quad x \in \Omega, \\ &u'(0) = u(1) = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Тогда минимальное собственное значение λ задачи (1) является наименьшим корнем уравнения

$$\gamma(\mu) = 1, \quad \mu \in \Lambda. \tag{3}$$

Задача вида (1) возникает при моделировании плазмы высокочастотного разряда пониженного давления [1]. Условия существования минимального собственного значения, отвечающего положительной собственной функции, определяют условия, необходимые для поддержания стационарного высокочастотного индукционного разряда пониженного давления.

Ранее исследовалась задача на собственные значения

$$\begin{aligned} &-(p(\lambda,x)u')' + q(\lambda,x)u = \lambda r(\lambda,x)u, \quad x \in \Omega, \\ &u(0) = u(l) = 0, \end{aligned} \tag{4}$$

с коэффициентами, зависящими от спектрального параметра, $\Omega = (0,l)$, $\overline{\Omega} = [0,l]$, в предположении, что $p(\mu,x)$, $q(\mu,x)$, $r(\mu,x)$, $\mu \in \Lambda$, $x \in \overline{\Omega}$ являются непрерывными положительными функциями.

Для фиксированного $\mu \in \Lambda$ обозначим через $\gamma(\mu)$ минимальное простое собственное значение, отвечающее положительной собственной функции $u(x) = u_\mu(x)$, $x \in \Omega$, параметрической задачи

$$\begin{aligned} &-(p(\mu,x)u')' + q(\mu,x)u = \gamma(\mu) r(\mu,x)u, \quad x \in \Omega, \\ &u(0) = u(l) = 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Тогда минимальное собственное значение λ задачи (4) является наименьшим корнем уравнения

$$\gamma(\mu) = \mu, \quad \mu \in \Lambda. \tag{6}$$

В работах [2,3] изучался метод конечных разностей для задачи (4) при $r(\mu,x) = r(x)$, $\mu \in \Lambda$, $x \in \overline{\Omega}$. Предполагалось, что функции $p(\mu,x)$, $q(\mu,x)$, $\mu \in \Lambda$, $x \in \overline{\Omega}$ являются невозрастающими по первому аргументу $\mu \in \Lambda$. Из этого условия вытекает свойство невозрастания функции $\gamma(\mu)$, $\mu \in \Lambda$, определяющей наименьшее собственное значение задачи (5), и существование единственного корня уравнения (6). В монографии [4] исследовался метод конечных элементов для задачи (4) в предположении невозрастания отношения Рэлея по спектральному параметру. В этом случае функция $\gamma(\mu)$, $\mu \in \Lambda$ также является невозрастающей и уравнение (6) имеет единственный корень. В работах [2–4] проведены исследования и для последующих собственных значений. В отличие от работ [2–4] в настоящей работе функция $\gamma(\mu)$, $\mu \in \Lambda$, определяющая наименьшее собственное значение задачи (2), может быть немонотонной.

2. Существование решений.

Пусть $\Lambda = [0,\infty)$, $\Omega = (0,1)$, $\overline{\Omega} = [0,1]$. Обозначим через H вещественное весовое гильбертово пространство Лебега с нормой

$$|v|_0 = \left(\int_0^1 x(v(x))^2 dx \right)^{1/2}.$$

Обозначим через $V = \{v : v, v' \in H, u(1) = 0\}$ вещественное весовое гильбертово пространство Соболева с нормой

$$|v|_1 = \left(\int_0^1 x(v'(x))^2 dx \right)^{1/2}.$$

Положим $K = \{v : v \in V, u(x) > 0, x \in \Omega\}$. Заметим, что функции из пространства V являются непрерывными на Ω. При фиксированном $\mu \in \Lambda$ определим билинейные формы

$$a(\mu, u, v) = \int_0^1 xp(\mu s(x))u'v'\,dx, \quad b(\mu, u, v) = \int_0^1 xr(\mu s(x))uv\,dx,$$

для $u, v \in V$. Обозначим

$$a'(\mu, u, v) = \int_0^1 xp'(\mu s(x))s(x)u'v'\,dx, \quad b'(\mu, u, v) = \int_0^1 xr'(\mu s(x))s(x)uv\,dx,$$

для $\mu \in \Lambda$, $u, v \in V$. Введем отношение Рэлея

$$R(\mu, v) = \frac{a(\mu, v, v)}{b(\mu, v, v)} \quad \forall v \in V \setminus \{0\}.$$

Дифференциальная задача (1) эквивалентна вариационной нелинейной задаче на собственные значения: найти минимальное число $\lambda \in \Lambda$ и функцию $u \in K$, $b(\lambda, u, u) = 1$, такие, что

$$a(\lambda, u, v) = b(\lambda, u, v) \quad \forall v \in V. \tag{7}$$

При фиксированном $\mu \in \Lambda$ введем вариационную линейную параметрическую задачу на собственные значения: найти минимальное число $\gamma(\mu)$ и функцию $u = u_\mu \in K$, $b(\mu, u, u) = 1$, такие, что

$$a(\mu, u, v) = \gamma(\mu) b(\mu, u, v) \quad \forall v \in V. \tag{8}$$

Минимальное собственное значение λ задачи (7) является наименьшим корнем уравнения (3).

Для фиксированного $\nu \in \Lambda$ положим $\Delta = [0, \nu]$, $s_2 = \max\limits_{x \in \overline{\Omega}} s(x)$, $\alpha_1 = p(0)$, $\alpha_2 = p(\nu s_2)$, $\beta_1 = r(0)$, $\beta_2 = r(\nu s_2)$. Обозначим через ξ наименьший нуль функции Бесселя $J_0(\mu)$ нулевого порядка.

Лемма 1. *Для $\mu \in \Delta$ справедливы неравенства*

$$\alpha_1 |v|_1^2 \leqslant a(\mu, v, v) \leqslant \alpha_2 |v|_1^2 \quad \forall v \in V, \quad \beta_1 |v|_0^2 \leqslant b(\mu, v, v) \leqslant \beta_2 |v|_0^2 \quad \forall v \in H.$$

Лемма 2. *Функция $\gamma'(\mu)$, $\mu \in \Lambda$ является непрерывной и вычисляется по формуле $\gamma'(\mu) = a'(\mu, v, v) - \gamma(\mu) b'(\mu, v, v)$ при $\mu \in \Lambda$, $v = u_\mu$.*

Теорема 1. *Пусть $p(0)\xi^2 > r(0)$. Тогда существует наименьшее простое собственное значение задачи* (7)*, отвечающее положительной собственной функции.*

3. Сеточная схема метода конечных элементов.

Приближенная схема метода конечных элементов для сформулированной задачи определяется заданием конечномерного подпространства V_h. Разобьем отрезок $[0, 1]$ равноотстоящими точками $x_i = ih$, $i = 0, 1, \ldots, N$, на элементы $e_i = (x_{i-1}, x_i)$, $i = 1, 2, \ldots, N$, $h = \pi/N$. Обозначим через V_h подпространство пространства V, состоящее из непрерывных функций v^h, линейных на каждом элементе $e_i = (x_{i-1}, x_i)$, $i = 1, 2, \ldots, N$. Положим $K_h = \{v^h : v^h \in V_h, u^h(x) > 0, x \in \Omega\}$.

Сеточная схема метода конечных элементов для вариационной задачи (7) состоит в нахождении минимального числа $\lambda^h \in \Lambda$ и функции $u^h \in K_h$, $b(\lambda^h, u^h, u^h) = 1$, таких, что

$$a(\lambda^h, u^h, v^h) = b(\lambda^h, u^h, v^h) \quad \forall v^h \in V_h. \tag{9}$$

При фиксированном $\mu \in \Lambda$ введем вариационную линейную параметрическую задачу на собственные значения: найти минимальное число $\gamma^h(\mu)$ и функцию $u^h = u_\mu^h \in K_h$, $b(\mu, u^h, u^h) = 1$, такие, что

$$a(\mu, u^h, v^h) = \gamma^h(\mu) b(\mu, u^h, v^h) \quad \forall v^h \in V_h. \tag{10}$$

Минимальное собственное значение λ^h задачи (9) является наименьшим корнем уравнения

$$\gamma^h(\mu) = 1, \quad \mu \in \Lambda. \tag{11}$$

Лемма 3. *Функция* $(\gamma^h(\mu))'$, $\mu \in \Lambda$ *является непрерывной и вычисляется по формуле* $(\gamma^h(\mu))' = a'(\mu, v^h, v^h) - \gamma^h(\mu)\, b'(\mu, v^h, v^h)$ *при* $\mu \in \Lambda$, $v^h = u^h_\mu$.

Теорема 2. *Пусть* $p(0)\xi^2 > r(0)$. *Тогда существует наименьшее простое собственное значение задачи* (9)*, отвечающее положительной собственной функции.*

Теорема 3. *Пусть* $\gamma'(\lambda) \neq 0$. *Тогда для достаточно малых* h *выполняются оценки погрешности:* $0 \leqslant \lambda^h - \lambda \leqslant ch^2$, $|u^h - u|_1 \leqslant ch$, *где* c *— положительная постоянная, не зависящая от* h.

4. Численные эксперименты.

Проведено вычисление наименьшего собственного значения и отвечающей ему положительной собственной функции для дифференциальной задачи на собственные значения (1) с коэффициентами $s(x) = 1 + x,\ x \in \overline{\Omega},\ \Omega = (0,1),\ \overline{\Omega} = [0,1],\ p(\mu) = \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{\mu + 2}, \quad r(\mu) = 3 + \mu^3, \quad \mu \in \Lambda$. Поскольку $p(0) = 1$, $r(0) = 3$, $\xi = 2.4048 > 2$, то получим $\dfrac{p(0)}{r(0)}\,\xi^2 = \dfrac{1}{3}\,\xi^2 > \dfrac{4}{3} > 1$. Следовательно, справедлива теорема 1 о существовании наименьшего простого собственного значения задачи (1), отвечающего положительной собственной функции.

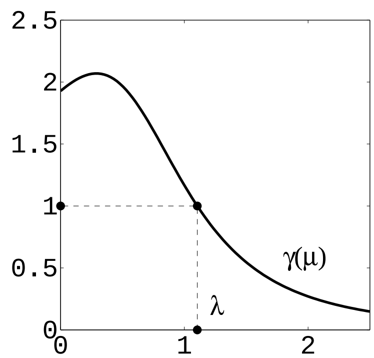

Рис. 1: Минимальное собственное значение

На рис. 1 построен график функции $\gamma(\mu)$ задачи (8) и отмечено наименьшее простое собственное значение $\lambda = 1.1047$ задачи (1). На рис. 2 построен график положительной собственной функции $u(x)$, $x \in \overline{\Omega}$, отвечающей собственному значению λ. Решение задачи проводилось с помощью схемы метода конечных элементов (10) и уравнения (11).

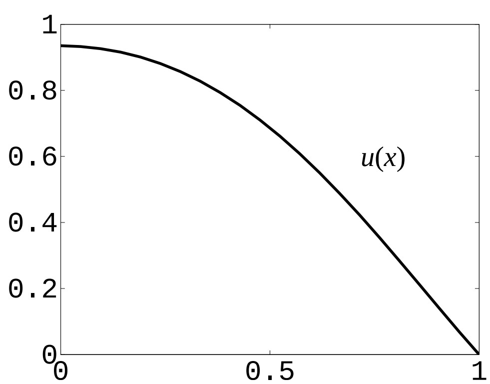

Рис. 2: Положительная собственная функция

В таблице 1 вычислен порядок сходимости приближенного собственного значения λ^h по формуле

$$\alpha = \log_2 \frac{\lambda^h - \lambda^{h/2}}{\lambda^{h/2} - \lambda^{h/4}}$$

Табл. 1: Скорость сходимости

N	α
10	1.96430
20	1.99063
50	1.99840
100	1.99958
200	1.99989
300	1.99996

для $h = 1/N$, $N = 10, 20, 50, 100, 200, 300$, так, что $\lambda^h - \lambda \approx ch^\alpha$. Экспериментальные результаты таблицы 1 согласуются с теоретическими результатами теоремы 3, а именно, $\alpha \approx 2$ при $N = 10, 20, 50, 100, 200, 300$.

Собственное значение $\lambda = 1.1047$ дифференциальной задачи получено как предельное значение приближений λ^h при $h \to 0$. Укажем, что точное собственное значение $\lambda = 1.1047$ совпадает с приближенным собственным значением λ^h при $N = 1000$ с приведенной точностью.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Абдуллин И.Ш., Желтухин В.С., Кашапов Н.Ф.** Высокочастотная плазменно-струйная обработка материалов при пониженных давлениях. Теория и практика применения. – Казань: Изд-во Казанского ун-та, 2000. – 348 с.
2. **Гулин А.В., Крегжде А.В.** Разностные схемы для некоторых нелинейных спектральных задач // Препринт № 153. – М.: ИПМ АН СССР, 1981. – 28 с.
3. **Крегжде А.В.** О разностных схемах для нелинейной задачи Штурма–Лиувилля // Дифференц. уравнения. – 1981. – Т. 17, № 7. – С. 1280–1284.
4. **Соловьёв С.И.** Нелинейные задачи на собственные значения. Приближенные методы. – Saarbrücken: LAP Lambert Academic Publishing, 2011. – 256 с.

REFERENCES

1. **Abdullin I.Sh., Zheltukhin V.S., Kashapov N.F.** High-frequency plasma-blasting treatment of materials at low pressures. Theory and practice of Application [Vysokochastotnaya plazmenno-struynaya obrabotka materialov pri ponizhennykh davleniyakh. Teoriya i praktika primeneniya]. – Kazan: Kazan University, 2000. – 348 p. (in Russian)
2. **Gulin A.V., Kregzhde A.V.** Difference schemes for some nonlinear spectral problems [Raznostnye skhemy dlya nekotorykh nelineynykh spectral'nykh zadach] // Preprint № 153. – Moscow: Inst. Appl. Math., 1981. – 28 p. (in Russian)
3. **Kregzhde A.V.** On difference schemes for a nonlinear Sturm-Liouville problem [O raznostnykh skhemakh dlya nelineynoy zadachi Shturma-Liuvillya // Differ. Uravn. – 1981. – V. 17, № 7. – P. 1280–1284 (in Russian)
4. **Solov'ëv S.I.** Nonlinear eigenvalue problems. Approximate methods [Nelineynye zadachi na sobstvennye znacheniya. Priblizhennye metody]. – Saarbrücken: LAP Lambert Academic Publishing, 2011. – 256 p. (in Russian)